SCIO

Matematika

Duben I 2023

Počet účastníků:	1 383	Počet úloh:	35
Čistá úspěšnost:	48,7 %	Max. možné skóre:	35,0
Korig. úspěšnost:	50,8 %	Max. dosažené skóre:	33,7
Hrubá úspěšnost:	55,6 %	Min. možné skóre:	-11,7
Průměrné skóre:	16,6	Min. dosažené skóre:	-5,0
Medián skóre:	16,7	Směr. odchylka skóre:	6,7

Rozdíl množin *A* a *B*: $A \setminus B$ případně $A - B$

Kvadratická rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$; $a \neq 0$

Goniometrické funkce:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1,\ x \neq k \cdot \dfrac{\pi}{2}$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \neq k\pi$

$\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometrie: sinová věta: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$; $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

kosinová věta: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$; $\log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$; $\log_z x^k = k \cdot \log_z x$; $\log_z x = y \Leftrightarrow x = z^y$

Aritmetická posloupnost: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$; $s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická posloupnost: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$; $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$ **Geometrická řada:** $s = a_1 \cdot \dfrac{1}{1-q},\ |q| < 1$

Rozklad na součin: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

Kombinatorika: $P(n) = n!$; $V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$; $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$; $V'(k,n) = n^k$; $C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k-1}{n-1}$

Binomická věta: $(a+b)^n = a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \dbinom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$

Analytická geometrie: velikost vektoru: $\vec{u} = (u_1; u_2)$ je: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Kosinus odchylky α přímek $p_1: a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ a $p_2: a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ je $\cos\alpha = \dfrac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Vzdálenost bodu $M[m_1; m2]$ od přímky p: $ax + by + c = 0$ je $|Mp| = \dfrac{|a \cdot m_1 + b \cdot m_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Středový tvar rovnice kružnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$; elipsy: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 - b^2$

Středový tvar rovnice hyperboly: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} - \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $-\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$; $e^2 = a^2 + b^2$

Vrcholová rovnice paraboly: $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-m), F\left[m \pm \dfrac{p}{2}; n\right]$; $(x-m)^2 = \pm 2p \cdot (y-n), F\left[m; n \pm \dfrac{p}{2}\right]$

Objemy a povrchy těles:

	Kvádr	Válec	Jehlan	Kužel	Koule
Objem	$a \cdot b \cdot c$	$\pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{1}{3} S \cdot v$	$\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$	$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$
Povrch	$2(ab+ac+bc)$	$2\pi \cdot r \cdot (r+v)$	$S+Q$	$\pi \cdot r \cdot (r+s)$	$4\pi \cdot r^2$

Matematika

1.

Čtvrtina čísla x zvětšená o 5 je o 25 menší než polovina čísla x. Čemu se rovná polovina x?

(A) méně než 30
(B) **60**
(C) 120
(D) 240

2.

Jaký je nejmenší možný kladný počet cvičenců, které by bylo možné postupně řadit do osmnáctistupu, desetistupu, osmistupu, čtyřstupu, trojstupu a dvojstupu, aniž by některý cvičenec chyběl v řadě nebo přebýval?

(A) 1 080
(B) **360**
(C) 180
(D) 90

3.

Do sudu přitéká stálou rychlostí voda. V 8:00 byl sud napuštěn do jedné poloviny, v 11:00 byl sud napuštěn do dvou třetin. Nejdříve v kolik hodin bude sud napuštěn úplně?

(A) v 16:00
(B) **v 17:00**
(C) v 18:00
(D) v 19:00

4.

V budově je pět podlaží označených čísly 1 až 5 od nejnižšího po nejvyšší. V každém podlaží sídlí právě jedna z pěti firem (Alfa, Beta, Gama, Delta, Epsilon). Jak firma Epsilon, tak firma Alfa sídlí v podlaží označeném sudým číslem. Firma Gama sídlí v podlaží označeném o dva větším číslem než firma Beta, která ale sídlí výše než firma Alfa.

Ve kterém podlaží sídlí firma Delta?

(A) **v prvním**
(B) ve třetím
(C) ve čtvrtém
(D) v pátém

5.

Funkce f je definována vztahem $f(x) = 3 + x$ a funkce g je definována vztahem $g(x) = 3 \cdot (3 + x)$.

Jakou hodnotu má $g(z)$, pokud platí $f(z) = 11$?

(A) 3
(B) 11
(C) 14
(D) **33**

Matematika

6.

Hodnota kterého z následujících výrazů je pro libovolné kladné celé číslo A vždy kladné sudé číslo?

(A) **$(A + 3) - (1 - A)$**
(B) $(1 + 2A) - A$
(C) $(3A + 2) - (1 - A)$
(D) $3(A + 1) - 2$

7.

Vztah mezi počtem bodů ztracených v testu a známkou vyjadřuje následující popis. K číslu 7 přičteme počet ztracených bodů z testu zmenšený o tři a součet vydělíme čtyřmi. Výsledkem je známka z testu. Známky jsou v rozmezí 1 až 5 a zaokrouhlujeme je na nejbližší celá čísla.

Která z následujících variant známky a počtu ztracených bodů z testu **není správná**?

(A) 11 ztracených bodů, známka 4
(B) 8 ztracených bodů, známka 3
(C) 4 ztracené body, známka 2
(D) **3 ztracené body, známka 1**

8.

Stánek s limonádou utržil v červenci c EUR, v srpnu s EUR a v září z EUR. Pro jeho tržby v uvedených měsících platí vztah:

$$\frac{c+z}{2} - 500 > \frac{c+s}{2}$$

Které z následujících tvrzení vyplývá z uvedeného vztahu?

(A) V každém z uvedených tří měsíců byly tržby za daný měsíc vyšší než 500 EUR.
(B) **Tržby za srpen byly nižší než tržby za září.**
(C) Tržby za červenec byly vyšší než tržby za srpen.
(D) Rozdíl mezi tržbami za září a tržbami za červenec byl alespoň 500 EUR.

9.

Ester s Kateřinou mají dohromady 450 medailí. Aby jich měly obě stejně, musela by Kateřina dát Ester 45 medailí. V jakém poměru jsou počty medailí Ester a Kateřiny?

(A) 1 : 2
(B) **2 : 3**
(C) 1 : 3
(D) 1 : 4

Matematika

10.

Na večírek dorazilo M mužů a Z žen. Žen bylo méně než mužů, ale ne méně než polovina počtu mužů. Která z následujících dvojic vztahů uvedenou situaci vyjadřuje?

(A) $M > Z$ **a zároveň** $2Z \geq M$

(B) $Z < M$ a zároveň $Z \leq \frac{M}{2}$

(C) $Z < M$ a zároveň $Z > \frac{M}{2}$

(D) $Z \leq M$ a zároveň $Z > \frac{M}{2}$

11.

Na střeleckých závodech závodník desetkrát vystřelí na terč, na což má limit 60 sekund. Za každý zásah terče získá 10 bodů. Dále dostane 1 bod za každou sekundu, o kterou skončil dříve oproti časovému limitu. Následující tabulka uvádí počty zásahů a čas u závodníků, kteří již odstříleli.

Jméno	Počet zásahů	Čas v sekundách
Jiří	6	53
Karel	5	48
Luděk	7	60

Jako poslední bude střílet Martin. Která z následujících kombinací počtu zásahů a času mu zajistí třetí nejvyšší počet bodů?

(A) 5 zásahů, 51 sekund
(B) 5 zásahů, 60 sekund
(C) 6 zásahů, 55 sekund
(D) 6 zásahů, 59 sekund

12.

Následující čísla

π, 3, $\frac{23}{7}$, $\log 3$

seřaďte vzestupně:

(A) $\log 3$, 3, $\frac{23}{7}$, π

(B) 3, $\log 3$, $\frac{23}{7}$, π

(C) $\log 3$, 3, π, $\frac{23}{7}$

(D) 3, $\log 3$, π, $\frac{23}{7}$

Matematika

13.

Nechť P, Q jsou dva polynomy a nechť nerovnice $P(x) \cdot Q(x) > 0$ má za řešení interval $(a; b)$. Stejný interval je též řešením nerovnice:

(A) $P(x) + Q(x) > 0$
(B) $P(x) > 1 - Q(x)$
(C) $P(x) > \frac{1}{Q(x)}$
(D) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$

14.

Je dáno přirozené číslo n. Označme A největší společný dělitel čísel n a 15 a označme B nejmenší společný násobek čísel n a 15. Platí-li $AB = 300$, pak platí:

(A) $n = 15$
(B) $\boldsymbol{n = 20}$
(C) $n = 25$
(D) $n = 30$

15.

Počet všech podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, které obsahují číslo 1 a neobsahují číslo 2, je roven:

(A) 7
(B) **8**
(C) 19
(D) 32

16.

Výraz $(3-a)^4$ je pro každé $a \in \mathbb{R}$ roven výrazu:

(A) $81 - a^4$
(B) $81 - 18a^2 + a^4$
(C) $81 - 108a + 54a^2 - 12a^3 + a^4$
(D) $81 + 108a + 54a^2 - 12a^3 + a^4$

17.

Tomáš hodil třemi standardními šestistěnnými kostkami. Pravděpodobnost, že tři čísla, která mu padla, jsou vzájemně různá, je rovna:

(A) $\frac{1}{20}$
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{5}{9}$
(D) $\frac{5}{6}$

18.

Správné seřazení čísel

$(4!)^4$, $(4!)^{4!}$, $4^{4!}$

podle velikosti je:

(A) $(4!)^4 < (4!)^{4!} < 4^{4!}$

(B) $4^{4!} < (4!)^4 < (4!)^{4!}$

(C) $(4!)^4 < 4^{4!} < (4!)^{4!}$

(D) $4^{4!} < (4!)^{4!} < (4!)^4$

19.

Vlak sestává z lokomotivy, tří vagonů pro pasažéry s kupé, tří vagonů pro pasažéry bez kupé a jednoho jídelního vozu (vagony stejného typu považujeme za nerozlišitelné). Kolika způsoby může být vlak sestaven, je-li jediná podmínka, že lokomotiva musí být první?

(A) 140
(B) 348
(C) 520
(D) 760

20.

Řešením nerovnice $\sqrt{x^2} + x - 2 < 0$ v oboru reálných čísel je množina:

(A) $\emptyset$
(B) $\mathbb{R}$
(C) $(-\infty, 1)$
(D) $(-1, +\infty)$

21.

V geometrické posloupnosti (a_n) je $a_5 = 1$ a $a_{10} = -\frac{1}{32}$. Její kvocient je:

(A) $-\frac{1}{2}$

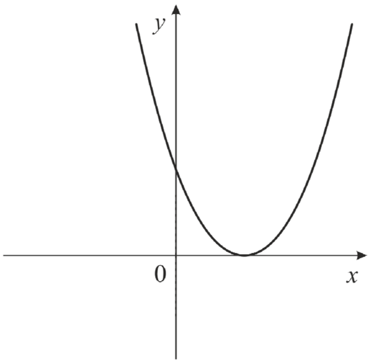
(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Matematika

22.



Na obrázku je zakreslen graf funkce $y = ax^2 + bx + c$. Pro koeficienty a, b, c platí:

(A) $a > 0, b > 0, c = 0$
(B) $a < 0, b < 0, c > 0$
(C) $a < 0, b > 0, c = 0$
(D) $\boldsymbol{a > 0, b < 0, c > 0}$

23.

Kterou vlastnost **nesplňuje** funkce $y = \frac{|x|}{x}$?

(A) Je omezená shora.
(B) **Je rostoucí.**
(C) Je lichá.
(D) Má maximum i minimum.

24.

Řešením nerovnice $\cos 2x < 1$ v intervalu $\langle -2\pi, 2\pi \rangle$ je množina

(A) $(-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$
(B) $(-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$
(C) $\langle -2\pi, 0) \cup (0, 2\pi \rangle$
(D) $\boxed{(-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)}$

25.

Počet uspořádaných dvojic $[x, y]$ reálných čísel, které vyhovují soustavě tří rovnic o dvou neznámých

$2x - 2y = 1,$

$x + 2y = 2,$

$2x + 3y = 6,$

je:

(A) **0**
(B) 1
(C) 2
(D) 3

Matematika

26. Úloha byla na základě rozhodnutí NOK vyřazena.

Číslo 3 se **nerovná** číslu:

(A) $-\log_2 \frac{1}{8}$
(B) $\log_3 27$
(C) $\mathbf{\log_2 64}$
(D) $3\log_4 4$

27.

Sečteme-li k za sebou jdoucích přirozených čísel, dostaneme součet 2 000. Číslo k může být rovno:

(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) **5**

28.

Máme šest po sobě jdoucích sudých čísel. Součet prvních tří z nich je 468. Součet zbylých tří je:

(A) 474
(B) 480
(C) **486**
(D) 492

29.

Funkce f: $y = (x + 2)^2 - x$ je složena z vnitřní funkce g a vnější funkce k. Pak funkce g a k mohou například být:

(A) g: $y = (x + 2)^2$, k: $y = x - 1$
(B) g: $y = x + 2$, k: $y = (x + 2) - x$
(C) g: $y = x + 2$, k: $y = (x + 2)^2 - 2$
(D) $\boldsymbol{g: y = x + 2,\ \ k: y = x^2 - x + 2}$

30.

Oba kořeny rovnice $x^2 + 2x - a = 0$ jsou kladné, jestliže pro reálný parametr a platí:

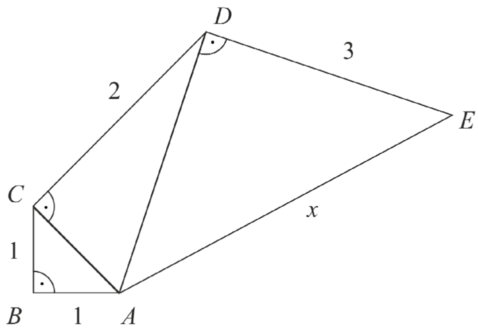
(A) $a < 0$
(B) $a > 0$
(C) $a > 1$
(D) **Takové *a* neexistuje.**

31.

V rovině jsou dány dva různé body A a B. Množina všech bodů Z v rovině, které splňují podmínku $|AB| - |BZ| = |AZ|$, je:

(A) střed úsečky AB
(B) osa úsečky AB
(C) **úsečka *AB***
(D) elipsa s ohnisky A a B

32.



Jsou-li trojúhelníky *ABC*, *ACD*, *ADE* pravoúhlé s délkami stran jako na obrázku, je délka úsečky označené na obrázku písmenem *x* rovna:

(A) 3
(B) $\sqrt{15}$
(C) 4
(D) $3\sqrt{3}$

33.

Nejkratší tětiva kružnice $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$ procházející bodem T[5; −1] leží na přímce o rovnici:

(A) $x - y - 6 = 0$
(B) $x + y - 6 = 0$
(C) $\mathbf{x + y - 4 = 0}$
(D) $x + y - 2 = 0$

34.

Osový řez rotačního kužele má obsah $36\sqrt{3}$ cm^2 a úhel u základny má velikost 60°. Obsah pláště kužele je:

(A) 36π cm^2
(B) **72π cm^2**
(C) 36 cm^2
(D) 72 cm^2

35.

Existují právě dva vektory $\vec{v}$, jejichž velikost je $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ a které jsou rovnoběžné s vektorem $\vec{u} = (-4; 2)$. Jedním z nich je vektor:

(A) $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$

(B) $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

(C) $\vec{v} = \left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$

(D) $\vec{v} = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$